10-10-18

$A \subseteq \mathbb{R}, A \neq \emptyset$

<u>Ορισμός</u>

Έστω ότι A άνω φραγμένο, ο αριθμός $M \in \mathbb{R}$ λέγεται <u>supremum</u> του A αν:

(i) M είναι άνω φράγμα του A

(ii) $\forall$ άνω φράγμα M' του A, ισχύει $M' \geq M$

*Αξίωμα της πληρότητας: Αν A είναι άνω φραγμένο τότε $\exists$ το $\sup A$

Ορισμός

A είναι κάτω φραγμένο. Ο αριθμός $\mu \in \mathbb{R}$ λέγεται infimum του A, αν:

(i) μ κάτω φράγμα του A.

(ii) $\forall$ κάτω φράγμα μ' του A ισχύει $\mu \geq \mu'$

infimum $\to$ μέγιστο κάτω φράγμα του A $\to$ $\inf A$

Πρόταση

Αν το A είναι κάτω φραγμένο, τότε $\exists$ το $\inf A$ κ' είναι μοναδικό.

Απόδειξη

Ορίζουμε το σύνολο $-A = \{-x : x \in A\}$. Γνωρίζουμε ότι $\exists$ $k \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x \geq k$, $\forall x \in A$.

$\Rightarrow \forall y \in -A$, $y \leq -k \Rightarrow -A$ είναι άνω φραγμένο $\Rightarrow$ Υπάρχει το $\sup(A) = M$.

Άρα, (i) $\forall y \in -A$, $y \leq M$.

(ii) $\forall M' \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε, $\forall y \in -A$, $y \leq M'$, ισχύει $M \leq M'$

$\Rightarrow \forall x \in A$, $x \geq -M$ κ' $\forall M' \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε, $\forall x \in A$, $x \geq -M'$, ισχύει $-M' \geq M \Rightarrow -M = \inf A$

Έστω ότι $\exists \gamma \in \mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $\gamma = \inf A \Rightarrow \gamma$ κάτω φράγμα του $A \Rightarrow \gamma \leq \inf A$.

Αν $\gamma < \inf A \Rightarrow \gamma$ δεν είναι το μέγιστο κάτω φράγμα του A, άτοπο $\Rightarrow \gamma = \inf A$

Ορισμός
Αν A δεν είναι άνω φραγμένο, ορίζουμε $\sup A = +\infty$.
Αν δεν είναι κάτω φραγμένο, ορίζουμε $\inf A = -\infty$

$\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = +\infty$
Πάντα!
Όταν $A \neq \emptyset \Rightarrow \inf A \leq \sup A$

Θεώρημα
→Αρχιμήδεια ιδιότητα
Αν $x \in \mathbb{R}$, τότε $\exists\, \nu \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\nu > x$

Απόδειξη
Έστω ότι $\forall\, \nu \in \mathbb{N}$, $\nu \leq x \Rightarrow \mathbb{N}$ άνω φραγμένο $\Rightarrow$ Υπάρχει το $\underset{a}{\underset{\shortparallel}{\sup \mathbb{N}}}$ και είναι πεπερασμένο

$\Rightarrow \forall\, \nu \in \mathbb{N}$, $\nu \leq a$ κ' $\forall$ άνω φράγμα β του $\mathbb{N}$, ισχύει $a \leq \beta$.
Ισχύει $\nu + 1 \leq a$, $\forall\, \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow \nu \leq a - 1$, $\forall\, \nu \in \mathbb{N} \Rightarrow a - 1$ άνω φράγμα του $\mathbb{N}$, άτοπο γιατί $a = \sup A \Rightarrow \exists\, \nu \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x < \nu$

Θεώρημα
Έστω $x \in \mathbb{R}$ $\exists!\, a \in \mathbb{Z}$, τέτοιο ώστε $x \leq a \leq x+1$
(Τότε $a = [x]$ = ο μεγαλύτερος ακέραιος $\leq x$)
↳ακέραιο μέρος

Απόδειξη
Θέτουμε $A = \{\nu \in \mathbb{Z} : \nu \leq x\}$.
$A \neq \emptyset$, φραγμένο $\Rightarrow \exists\, \sup A$ κ' είναι $< +\infty$. Θέτουμε $a = \sup A$

$\nu \leq x, \ \forall \nu \in A$

$\Rightarrow x$ άνω φράγμα του A

$\Rightarrow a = \sup A \leq x$

Έστω $x \geq a+1 \Rightarrow a+1 \leq A \Rightarrow a+1 \leq \sup A = a$

<u>Άτοπο</u>

$\Rightarrow x \leq a+1$

Έστω $a' \in \mathbb{Z}$ με $a' \leq x < a'+1 \Rightarrow a' \in A \Rightarrow a' \leq \sup A = a$

- Αν $a' = a$, τέλος
- Αν $a' < a \Rightarrow a' \leq a-1 \Rightarrow a'+1 \leq a \leq x$, <u>άτοπο</u>

Άρα $a' = a$

<u>Παραδείγματα</u>

$\sup A = ?$

1) $A = \{1 - \frac{1}{\nu}, \nu \in \mathbb{N}\}$

$A = \{0, 1/2, 2/3, 3/4, \dots\}$

νδο $\sup A = 1$

(i) 1 άνω φράγμα του A

(ii) Έστω M άνω φράγμα του A. $\Rightarrow 1 - \frac{1}{\nu} \leq M$ ①, $\forall \nu \in \mathbb{N}$

Θέλουμε νδο $1 \leq M$.

Έστω ότι $1 > M \Rightarrow$ Από ① $1 - M \leq \frac{1}{\nu} \overset{1-M>0}{\Longrightarrow} \nu \leq \frac{1}{1-M}$

Δεν γίνεται γιατί ~~[illegible]~~ φράζει τους φυσικούς

<u>Άτοπο</u> από αρχιμήδεια ιδιότητα.

Άρα $M \geq 1$

2) Αρχή της καλής διάταξης του $\mathbb{N}$ [των φυσικών αρ.]

Έστω $A \subseteq \mathbb{N}$, $A \neq \emptyset$, τότε A έχει ελάχιστο στοιχείο

Παρατήρηση

Αν $\sup A \in A \Rightarrow \sup A = \max A$

Αν ~~sup~~ $\inf A \in A \Rightarrow \inf A = \min A$.

Απόδειξη

Το A είναι κάτω φραγμένο (από το 1) άρα ~~...~~ $\inf A \in \mathbb{R}$. Θέτουμε $a = \inf A$.

Αρκεί νδο. $a \in A$

Έστω ότι $a \notin A \Rightarrow a < \nu \,, \forall \nu \in A$

$\Rightarrow [a] \leq a < \nu \,, \forall \nu \in A$

$\Rightarrow [a] \leq \nu - 1 \,, \forall \nu \in A$ $\quad$ * $[x] \leq x < [x] + 1$

$\Rightarrow [a] + 1 \leq \nu \,, \forall \nu \in A$

$\Rightarrow [a] + 1 \rightarrow$ κάτω φράγμα του A.

$\Rightarrow [a] + 1 \leq \inf A = a$. Άτοπο

Άρα $a \in A$.

Θεώρημα

Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ $[A \neq \emptyset]$

(i) $M = \sup A$ αν το M είναι άνω φράγμα του A κ' $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, x \in A$ τέτοιο ώστε $x \leq M \leq x + \varepsilon$

(= μπορούμε να βρούμε στοιχεία οσωδήποτε κοντά στο M)

πχ. $A = \{ 1 - \frac{1}{\nu} / \nu \in \mathbb{N} \}$

(ii) $\mu = \inf A$ αν το μ είναι κάτω φράγμα του A κ' $\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, x \in A$ τέτοιο ώστε $\mu > x - \varepsilon$

Απόδειξη

- $M = \sup A \Rightarrow M$ άνω φράγμα.

Έστω $\varepsilon > 0$ κ' $\nexists\, x \in A$ τέτοιο ώστε $M < x + \varepsilon \,, \forall x \in A$

$\Rightarrow \forall x \in A \ \ M \geq x + \varepsilon \Rightarrow x \leq M - \varepsilon$

Άρα $M - \varepsilon$ άνω φράγμα του $A \Rightarrow M - \varepsilon \geq \sup A = M$

Άτοπο

Άρα $\exists\, x \in A$ τέτοιο ώστε $M < x + \varepsilon$.

- M άνω φράγμα του A κ' $\forall \varepsilon>0$, $\exists x\in A$ τέτοιο ώστε $M<x+\varepsilon$.

Έστω M' άνω φράγμα του A. Αρκεί νδο $M'\geq M$

Έστω $\varepsilon>0$

$M'\geq x$, $\forall x\in A$ κ' $\exists x_\varepsilon$ τέτοιο ώστε $M<x_\varepsilon+\varepsilon$

$M'\geq x_\varepsilon > M-\varepsilon \Rightarrow M'>M-\varepsilon$, $\forall \varepsilon>0$

Έστω ότι $M'<M$. Παίρνω $\varepsilon = M-M'>0$

$\Rightarrow M'>M-(M-M') \Rightarrow M'>M'$ Άτοπο $\Rightarrow M'\geq M$

$A=\{\frac{\nu+1}{\nu} : \nu\in\mathbb{N}\}$

$\inf A = ?$

$A=\{2, 3/2, 4/3, 5/4, \dots\}$ Άρα το 1 είναι κάτω φράγμα του A. Θδο $1=\inf A$

Έστω $\varepsilon>0$, $\exists x\in A$ τέτοιο ώστε $x<1+\varepsilon$?

$$\frac{\nu+1}{\nu} = 1+\frac{1}{\nu}$$

Παίρνω $\nu\in\mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $\frac{1}{\nu}<\varepsilon \Leftrightarrow \nu>1/\varepsilon$

$$\underbrace{\frac{\nu+1}{\nu}}_{= x} = 1+\frac{1}{\nu} < 1+\varepsilon$$

- Έστω $x,y\in\mathbb{R}$, με $x<y$ τότε:

(i) $\exists p\in\mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε $x<p<y$

(ii) $\exists r\in \underbrace{\mathbb{R}/\mathbb{Q}}_{\text{Άρρητος}}$, τέτοιο ώστε $x<r<y$

Πυκνότητα ρητών και άρρητων στο $\mathbb{R}$

Πόρισμα

Έστω $x, y \in \mathbb{R}$ με $x<y$. Τότε υπάρχουν άπειροι ρητοί και άρρητοι μέσα στο (x,y)

Απόδειξη

Ειδική περίπτωση $x \geq 1$. Από αρχιμήδεια ιδιότητα, $\exists\, k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $k > \frac{1}{y-x}$ $\left[\frac{1}{k} < y-x \Rightarrow -\frac{1}{k} > x-y\right]^{*}$

Θεωρούμε το σύνολο $A = \{n \in \mathbb{N} : \frac{n}{k} > x\}$

$A \neq \emptyset$ κ' $A \subseteq \mathbb{N}$

$\xrightarrow{\text{Αρχή της καλής διάταξης}} \exists\, n_0 = \min A$.

Θδο $\underbrace{\frac{n_0}{k} > x}$ κ' $\boxed{\frac{n_0}{k} < y}$

↳ ιδιότητα συνόλου A.

Έστω ότι $\frac{n_0}{k} \geq y \Rightarrow \frac{n_0}{k} - \frac{1}{k} \geq y - \frac{1}{k}^{*} \Rightarrow \frac{n_0 - 1}{k} \geq y + x - y$

$\Rightarrow \frac{n_0-1}{k} \geq x$

$n_0 - 1 \in A \rightarrow n_0 - 1 \geq \min A = n_0$, Άτοπο

Άρα $\frac{n_0}{k} < y$ $\left[p = \frac{n_0}{k}\right]$

Γενική περίπτωση:

$\exists\, k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $x + k \geq 1 \xRightarrow[\text{περίπτωση}]{\text{Ειδική}} \exists\, p \in \mathbb{Q}$ τέτοιο ώστε $x + k < p < y + k \Rightarrow x < p - k < y$

↳ $k \in \mathbb{Q}$